PART3　1 次不定方程式とユークリッドの互除法

例題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$35x - 46y = 1$$

Point Pickup

練習

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$95x+28y=1$$

第 9 講　PART3　確認問題

1　方程式 $76x-35y=1$ の整数解をすべて求めよ。

$x=$ アイ $k+$ ウ ,

$y=$ エオ $k+$ カキ 　（k は整数）

PART3　1 次不定方程式とユークリッドの互除法

例題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$35x-46y=1$

$35x-46y=1$ …… ①

46 と 35 に互除法を用いると

$46=35\cdot1+11$　より　$11=46-35\cdot1$ …… ②

$35=11\cdot3+2$　より　$2=35-11\cdot3$ …… ③

$11=2\cdot5+1$　より　$1=11-2\cdot5$ …… ④

④に③を代入して整理し，さらに②を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1&=11-2\cdot5\\&=11-(35-11\cdot3)\cdot5=11-35\cdot5+11\cdot15\\&=11\cdot16-35\cdot5\\&=(46-35\cdot1)\cdot16-35\cdot5=46\cdot16-35\cdot16-35\cdot5\\&=35\cdot(-21)-46\cdot(-16)\end{aligned}$$

よって，$35\cdot(-21)-46\cdot(-16)=1$ …… ⑤

①－⑤より $35(x+21)-46(y+16)=0$　つまり　$35(x+21)=46(y+16)$ …… ⑥

35 と 46 は互いに素より，$x+21$ は 46 の倍数である。

よって，$x+21=46k$（k は整数）と表される。

このとき，⑥より $35\cdot46k=46(y+16)$　　$35k=y+16$

したがって，求める整数解は $x=46k-21$，$y=35k-16$（k は整数）

練習

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$95x+28y=1$

$95x+28y=1$ …… ①

95 と 28 に互除法を用いると

$95=28\cdot3+11$ より $11=95-28\cdot3$

$28=11\cdot2+6$ より $6=28-11\cdot2$

$11=6\cdot1+5$ より $5=11-6\cdot1$

$6=5\cdot1+1$ より $1=6-5\cdot1$

よって $1=6-5\cdot1$

$=6-(11-6\cdot1)\cdot1=6-11\cdot1+6\cdot1$

$=6\cdot2-11\cdot1$

$=(28-11\cdot2)\cdot2-11\cdot1=28\cdot2-11\cdot4-11\cdot1$

$=28\cdot2-11\cdot5$

$=28\cdot2-(95-28\cdot3)\cdot5=28\cdot2-95\cdot5+28\cdot15$

$=95\cdot(-5)+28\cdot17$ より　$95\cdot(-5)+28\cdot17=1$ …… ②

①－②より $95(x+5)+28(y-17)=0$　つまり　$95(x+5)=-28(y-17)$ …… ③

95 と 28 は互いに素より，$x+5$ は 28 の倍数である。

よって，$x+5=28k$（k は整数）と表される。

このとき，③より $95\cdot28k=-28(y-17)$　　$-95k=y-17$

したがって，求める整数解は $x=28k-5$，$y=-95k+17$（k は整数）

第 9 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：35，ウ：6，エオ：76，カキ：13

[解説]

$$76x-35y=1 \quad \cdots\cdots①$$

76 と 35 に互除法を用いると **[A]**

$76=35\cdot2+6$　より　$6=76-35\cdot2$　……②

$35=6\cdot5+5$　より　$5=35-6\cdot5$　……③

$6=5\cdot1+1$　より　$1=6-5\cdot1$　……④

④に③を代入して整理し，さらに②を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1&=6-5\cdot1\\&=6-(35-6\cdot5)\cdot1\\&=6\cdot6-35\cdot1\\&=(76-35\cdot2)\cdot6-35\cdot1\\&=76\cdot6-35\cdot13\end{aligned}$$

よって，$76\cdot6-35\cdot13=1$　……⑤

①－⑤より $76(x-6)=35(y-13)$　……⑥

76 と 35 は互いに素より，$x-6$ は 35 の倍数である。

よって，$x-6=35k$　（k は整数）　と表される。

このとき，⑥より $76\cdot35k=35(y-13)$　　$76k=y-13$

したがって，求める整数解は

$$\boldsymbol{x=35k+6,\ y=76k+13}\quad（k\text{ は整数}）$$

［A］　不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の１つ（特殊解）が見つからないときは，a と b に互除法を用いる方法がある。